数理解析研究所講究録
481巻 1983年 1-17

M. Duflo教授講演記録

Duflo教授は，日本学術振興会の外国人招へい研究者として，1982年3月15日から一か月間滞日され，多くの講演をされた．それらから重複するものを除いて記す．

1. Harmonic analysis on complex Lie algebra

（1982年3月18，23日於京都大学理学部）

Gを複素連結リー群，$\mathfrak{g}$をそのリー環とする．以下$\mathfrak{g}$を実リー環とみなし，$\mathfrak{g}^*$を$\mathfrak{g}$の共役空間とする．Gは$\mathfrak{g}^*$に反傾随伴表現で作用する．$f \in \mathfrak{g}^*$に対して，Gにおけるfの固定群を$G(f)$，そのリー環を$\mathfrak{g}(f)$とする．軌道$G \cdot f$が最高次元のとき，fは正則（regular）であるといわれる．fが正則ならば$\mathfrak{g}(f)$は可換である．$\mathfrak{g}(f)$の元Xで$\mathrm{ad}\,X$が半単純となるもの全体を$\mathfrak{s}(f)$で表す．fが正則で$\mathfrak{s}(f)$が最高次元のとき，fは強正則（very regular）といわれ，その全体を$\mathfrak{g}^*_{vr}$で表す．$\mathfrak{g}^*_{vr}$は$\mathfrak{g}^*$でZariski開集合であり，G

は複素リー群故，任意の $f, f' \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{vr}}$ に対して，$\mathfrak{h}(f)$ と $\mathfrak{h}(f')$ は共役である．$\mathfrak{h}$をこの共役類の代表元とし，H (resp. H')を$\mathfrak{h}$のGにおける中心化群（resp. 正規化群），$\mathfrak{j}$を$\mathfrak{h}$と可換な$\mathfrak{g}$の元全体とする．$\mathfrak{g}$はルート空間分解されて，$\mathfrak{g} = \mathfrak{j} + \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$ となり，また，$W = H'/H$ は有限群である．$a_0 \in \mathfrak{h}$を正則元とし，

$$\Delta^+ = \left\{ \alpha \in \Delta \, ; \begin{array}{ll} ⓐ\ \mathrm{Re}\,\alpha(a_0) > 0 & \text{または} \\ ⓑ\ \mathrm{Re}\,\alpha(a_0) = 0, \ \mathrm{Im}\,\alpha(a_0) > 0 & \end{array} \right\}$$

$\mathfrak{n} = \sum_{\alpha\in\Delta^+} \mathfrak{g}_\alpha$, $\quad \mathfrak{p} = \sum_{\alpha\in\Delta} \mathfrak{g}_\alpha$

とおく．このとき，$\mathfrak{p} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ が成り立つ．

$\boxed{\text{命題}}$ (i) $f \in \mathfrak{g}^*_{\mathrm{vr}}$ ならば，$G\cdot f \cap \mathfrak{j}^* \neq \phi$

(ii) $f, f' \in \mathfrak{j}^* \cap \mathfrak{g}^*_{\mathrm{vr}}$ かつ $g\cdot f = f'$ $(g \in G)$ ならば，$g \in H'$

(iii) $f \in \mathfrak{j}^* \cap \mathfrak{g}^*_{\mathrm{vr}}$ ならば，$B_f(x, y) = f([x, y])$ は $\mathfrak{p} \times \mathfrak{p}$ 上非退化． ▨

dX, dY, dZ をそれぞれ，$\mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{j}$ 上のルベーグ測度で，$dX = dZ\,dY$ が成り立つものとし，df, $d\lambda$ をそれぞれ，$\mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{j}^*$ 上のルベーグ測度で，各 $\alpha \in \mathcal{S}(\mathfrak{g})$（$\mathfrak{g}$ 上の Schwartz 函数全体）に対し

$$\int_{\mathfrak{g}^*}\int_{\mathfrak{g}} e^{if(X)}\alpha(X)\,dX\,df = \alpha(0)$$

（$d\lambda$ についても同様）が成り立つ様に正規化する．$e_1,\cdots,e_{2d}$ を $\mathfrak{f}$ の基底で，$dY=|e_1^*\wedge\cdots\cdots\wedge e_{2d}^*|$ なるものとし，各 $\lambda\in\mathfrak{f}^*$ に対して，$\pi^B(\lambda)=[\det\lambda([e_i,e_j])]^{1/2}$ とおく．π^B は $\mathfrak{f}^*$ 上の多項式函数故，$\mathfrak{f}$ 上の symmetric algebra に属する．π^B が定義する $\mathfrak{f}$ 上の微分作用素を D と書く．

$\omega(H)=\det ad_{\mathfrak{n}}(H)$ $(H\in\mathfrak{f})$ とおき，正則な各 $a\in\mathfrak{s}$ と $\varphi\in\mathcal{S}(\mathfrak{g})$ に対して，

$$\psi_a(g)=D(\omega(Z)\varphi((Ad\,g)Z))\big|_{Z=a}$$

とおくと，$\psi_a(gh)=(\det Ad_{\mathfrak{g}/\mathfrak{f}}\,h)\psi_a(g)$ 故

$$M_a(\varphi)=\frac{i^d}{(2\pi)^d\,\#W}\int_{G/H}\psi_a(g)\,d\dot{g}$$

が定義できる．このとき，$M_a\in\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ であって，$\mathfrak{g}$ が半単純ならば，Harish-Chandra の定義した不変積分に一致する．

定理 (i) $a\mapsto M_a$ は $\mathfrak{s}$ 上の $\mathcal{S}'(\mathfrak{g})$ 値 C^∞ 函数に拡張され，M_a の台は a の G 軌道 $G\cdot a$ であり，M_0 は Dirac の δ である．

(ii) $$\Theta_a(\lambda)=\frac{1}{\#W}\sum_{w\in W}e^{i\lambda(w\cdot a)}\qquad(\lambda\in\mathfrak{f}^*\cap\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{r}\mathfrak{n}})$$

とおき，Θ_a を G 不変性によって，$\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{r}\mathfrak{n}}$ 上に拡張する．このとき，M_a の Fourier 変換は Θ_a である．

(iii) $\mathfrak{g}_G=\{X\in\mathfrak{g}\,;\,\exp X=e\}$ とおく．このとき，$n_G=\sum_{a\in\mathfrak{S}\cap\mathfrak{g}_G}M_a$ は $\mathcal{D}'(\mathfrak{g})$ で収束し，$\mathfrak{g}_G$ の中に台を持ち，$0\in\mathfrak{g}$ の近傍で Dirac の δ に等しい． ▨

（野村隆昭記）

2. An application of primitive ideals of enveloping algebras to the harmonic analysis on Lie groups after J.-Y. Charbonnel

（1982年3月25日於京都大学理学部）

Gを連結リー群，πをGのHilbert空間$\mathfrak{H}$への正規因子表現，$VN(\pi)$を$\pi(G)$で生成される因子とする．正規因子表現は，指標の研究に際して，Pukanszkyによって導入された．$C^*(G)$をGの群C^*環とすると，正規因子表現πは次の二条件で特徴付けられる．

(i) $VN(\pi)$ は semifinite

(ii) $C^*(G)^+$に元φが存在して，πの$C^*(G)$への自然な延長を再びπで表すと，$\pi(\varphi)$は0でない跡族．

[1]では，Gが可解のとき，上の(ii)において，φはG上の台がcompactなC^∞函数（その全体を$C_c^\infty(G)$で表す）からとれることが示された．本講演の主定理は，可解という条件を取り除いた場合の次の定理である．

$\boxed{\text{定理1}}$ $C_c^\infty(G)$ に元 φ が存在して，$\pi(\varphi)$ は 0 ではなく，$VN(\pi)$ に関して compact である．すなわち，$VN(\pi)$ での跡族のノルム閉包に属する． ▨

さて，$\mathfrak{g}$ を G のリー環，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ を $\mathfrak{g}$ の複素化，$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ を $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の普遍包絡環とする．$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の元は，自然に，G の単位元 e に台を持つ超函数とみなせる．$\mathfrak{H}_\infty$ で π に関する C^∞ ベクトル全体を表し，$d\pi$ を π の微分として得られる $\mathfrak{H}_\infty$ での $\mathfrak{g}$ の，従って $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の表現とする．このとき，$d\pi$ の核 I_π は $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の原始イデアルである．$U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の各原始イデアル I に対して，$\hat{I}$ を $I' \supsetneq I$ なる $U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}})$ の原始イデアルすべての共通部分とする．定理1は次の定理2と，$\hat{I} \neq I$ なること [2, 4.6] から証明される．

$\boxed{\text{定理2}}$ 任意の $u \in \hat{I}_\pi$，$\varphi \in C_c^\infty(G)$ に対して，$\pi(u * \varphi)$ は $VN(\pi)$ に関して compact である． ▨

$C^*(G)$ の各原始イデアル J に対して，

$$I(J) = \{u \in U(\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}) \,;\, u * C_c^\infty(G) \subset J\}$$

とおく．定理2は次の定理3から証明される．

$\boxed{\text{定理3}}$ J, J' を $C^*(G)$ の原始イデアルとする．このとき，$J \subset J'$ かつ $I(J) = I(J')$ ならば，$J = J'$ である． ▨

文　　献

[1] J.-Y. Charbonnel, Sur les semi-caractères des groupes de Lie résolubles connexes, J. Funct. Anal., 41 (1981), 175-203.

[2] C, Moeglin, Idéaux primitifs des algèbres enveloppantes, J. Math. Pures et Appl., 59 (1980), 265-336.

（野村隆昭記）

3. Construction of a set of irreducible unitary representations of real algebraic Lie groups, sufficiently big to decompose $L^2(G)$

（1982年3月29日於東北大学理学部）

Gを実リー群，$\mathfrak{g}$をそのリー環とする．以下，これまでに用いた記号は説明なしに用いる．$f \in \mathfrak{g}^*$ が good polarization を持つとは，$\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ の可解部分環$\mathfrak{h}$で，fでの polarization になっていて，しかも Pukanszky 条件をみたしているものが存在するときにいう．$\mathfrak{g}$自身が可解ならば，任意の $f \in \mathfrak{g}^*$ は good polarization を持つ．一方，$\mathfrak{g}$が半単純ならば，f が good polarization を持つことと fが正則半単純であることとは同値である．これはまた，$\mathfrak{g}(f)$ が Cartan部分環になることと同値である．$B_f(x, y) = f([x, y])$ とおくと B_f は $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$ 上にシンプレクティック構造を与え，シンプレクティック群 $Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$，メタプレクティック群 Mp

$(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$を考えることができる．

$$\begin{array}{ccccccccc} & & Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) & \longleftarrow & Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ 1 & \leftarrow & G(f) & \longleftarrow & G(f)^{\sim} & \leftarrow & \{1, e\} & \leftarrow & 1 \end{array}$$

$G(f)^{\sim}$ の表現τで

$\tau(e) = -Id, \quad \tau(\exp X) = e^{if(X)} Id \quad (X \in \mathfrak{g}(f))$

となるもの全体を $X(f)$ で表す．また，その内で既約なものの全体を $X^{irr}(f)$ で表す．$X(f) \neq \phi$ のとき，f は admissible であるといわれる．

さて，$f \in \mathfrak{g}^*$ を admissible かつ good polarization を持つものとし，$\tau \in X(f)$ とする．

$\boxed{\text{定理 1}}$ Gのユニタリ表現 $T_{f,\tau}$ が構成できて，$T_{f,\tau}$ の commutant とτのそれとは同型である．■

まず例として，Gが algebraic で，fでの polarization $\mathfrak{h}$で，$G(f)$-不変かつ実 (i.e. $\mathfrak{h} = (\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g})_{\mathbb{C}}$) でしかも good であるものが存在する場合を考えてみよう．B_0 を $\mathfrak{h} \cap \mathfrak{g}$に対応する$G$の解析部分群，$B = G(f)B_0$ とおく．BはGの閉部分群になる．

$\rho_{\mathfrak{h}}(\hat{h}) = [\det(Ad\, h)_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{h}}]^{-1/2} \quad (G(f)^{\sim} \ni \hat{h} \mapsto h \in G(f))$

とおく．Gからτの表現空間に値をとる函数φで

$$\varphi(gh) = \tau(\hat{h})^{-1}\rho_{\mathfrak{b}}(\hat{h})^{-1}\varphi(g) \qquad (G(f)^{\sim} \ni \hat{h} \mapsto h \in G(f))$$

$$X\varphi = -(if + \rho_{\mathfrak{b}}^{0})(X)\varphi \qquad (X \in \mathfrak{b})$$

(ただし, $\rho_{\mathfrak{b}}^{0}(X) = -\mathrm{tr}((\mathrm{ad}\,X)_{\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}/\mathfrak{b}})$ $(X \in \mathfrak{b})$)
をみたすものの全体を $\mathcal{H}_{f,\tau}$ とおく.

$$T_{f,\tau,\mathfrak{b}} = \mathrm{Ind}_{B}^{G}\left(\tau \frac{\rho_{\mathfrak{b}}}{|\rho_{\mathfrak{b}}|} e^{if}\right)$$

とおくと, Andler によって, $T_{f,\tau,\mathfrak{b}}$ の同値類は $\mathfrak{b}$ に依らないことが証明されている.

次に, Gが連結かつ reductive のときを考える. このとき得られる $T_{f,\tau}$ $(\tau \in X^{irr}(f))$ は, 正則な infinitesimal character を持つ, tempered な既約表現である.

そして, Gの単位元の連結成分 G_0 が reductive のときは, Mackey の obstruction を, Vogan による Kostant-Borel-Weil-Bott の定理の一般化を用いて計算する.

一般には, 定理1は $\mathfrak{g}$ の次元に関して帰納的に構成される: $\mathfrak{n}$ を $\mathfrak{g}$ の最大べき零イデアルとし, u を f の $\mathfrak{n}$ への制限, $\mathfrak{h} = \mathfrak{g}(u)$, $\mathfrak{z} = \mathfrak{n}(u) \cap \mathrm{Ker}\,u$, $\mathfrak{g}_1 = \mathfrak{h}/\mathfrak{z}$ とおく.
$\dim \mathfrak{g} = \dim \mathfrak{g}_1$ のとき, u は単射で, $\mathfrak{g}$ は reductive となって先の構成が適用される. $\dim \mathfrak{g}_1 < \dim \mathfrak{g}$ のときは, 帰納法の仮定が適用される. $\mathfrak{g}$ が reductive で u が単射でないとき, 構成の仕方が二通りできるが, これらは勿論整合

している．詳しくは[1]を参照．

次に，この様にして構成された $T_{f,\tau}$ の全体が，G のユニタリ双対 $\hat{G}$ の中でどの位大きいかが問題となる．

$\boxed{\text{例1}}$. G が amenable のとき．

$\boxed{\text{定理2}}$ I を $C^*(G)$ の原始イデアルとする．このとき，admissible かつ good polarization を持つ $f \in \mathfrak{g}^*$ と $\tau \in X^{irr}(f)$ が存在して，I は $T_{f,\tau}$ の $C^*(G)$ での核に一致する． ▨

従って，定理2にいう様な f と τ の組 (f, τ) の全体を X^{irr} とおくと，G が I 型のとき，$\hat{G}$ は X^{irr} の G 軌道で parametrize される．

$\boxed{\text{例2}}$ G が algebraic のとき（このとき，G は I 型）

$\mathcal{T} = \{T_{f,\tau} ; (f, \tau) \in X^{irr}\}$ が $\hat{G}$ において Borel 集合と仮定する（G が複素のときは成り立っている）．

$\boxed{\text{定理3}}$ (i) $\hat{G} - \mathcal{T}$ の Plancherel 測度は 0 である．

(ii) $T_{f,\tau}$ が自乗可積分 $\Leftrightarrow$ $G(f)$ が compact かつ f は強正則． ▨

文　献

[1] M. Duflo, Construction de représentations unitaires d'un groupe de Lie, Cours d'été du C.I.M.E., Cortona, 1980.

（野村隆昭記）

4. Sur les idéaux induits dans les algèbres enveloppantes

（1982年4月6日於広島大学総合科学部）

可換体 k を固定し，以下に出てくるベクトル空間，テンソル積，多元環等はすべて k 上で考えるものとする．$\mathfrak{g}$ をリー環とするときその上の包絡多元環を $U(\mathfrak{g})$ で表す．$u\in U(\mathfrak{g})$ に対して，$u\mapsto \check{u}$ は $X\in\mathfrak{g}$ に対して $\check{X}=-X$ によって定まる $U(\mathfrak{g})$ の主反自己同型とする．$\mathfrak{g}$ 上の一次形式 λ が $[\mathfrak{g},\mathfrak{g}]$ 上で消えているとき，$u\mapsto u^{\lambda}$ は $X\in\mathfrak{g}$ に対して $X^{\lambda}=X+\lambda(X)$ によって定まる $U(\mathfrak{g})$ の自己同型とする．$\mathfrak{g}$ が有限次元のとき，$\mathfrak{g}$ のモジュール関数は一次形式 $X\mapsto \mathrm{tr}\,\mathrm{ad}\,X$ である．

今 $\mathfrak{f}$ を有限次元リー環，θ をそのモジュール関数とし，A は $U(\mathfrak{f})$ を含み同じ単位元を持つ結合的代数とする．更に A は $U(\mathfrak{f})$ 上の左・右加群として自由加群であると仮定する．F を $\mathrm{ad}\,\mathfrak{f}$ の作用で安定な A の有限次元部分空間とすれば，F 上に自然に $U(\mathfrak{f})$ の表現が引き起される．この表現に関して $L\subset U(\mathfrak{f})$ を $\check{L}$ がその核となるようなイデアルとする．また π をあるベクトル空間 V 上の $\mathfrak{f}$ の表現とし，I および J をそれぞれ，π から定まる $U(\mathfrak{f})$ の表現および $F\otimes V$ 上の表現の核が $\check{I}$ および $\check{J}$ となるような $U(\mathfrak{f})$ のイデアルとする．このとき次の定理が成り立つ．

$\boxed{\text{定理1}}$ FがAJに含まれるならばFは$I^{-\theta}A$に含まれる. ▨

$\mathfrak{g}$は$\mathfrak{f}$を含むリー環とし, ηをそのモジュール関数とする. ψは$\psi(X)=\eta(X)-\theta(X)$, $(X\in\mathfrak{f})$によって定まる$\mathfrak{f}$上の一次形式を表すとし, Iを$U(\mathfrak{f})$のイデアルとする.

$\boxed{\text{定理2}}$ $U(\mathfrak{g})I$に含まれる$U(\mathfrak{g})$の最大イデアルは$I^{\psi}U(\mathfrak{g})$に含まれる$U(\mathfrak{g})$の最大イデアルと一致する. ▨

（江口正晃記）

5. Mackey's theory for algebraic groups

（1982年4月8日於九州大学理学部）

Gを標数0の局所体k上定義された線形代数群$\underline{\underline{G}}$の$k$有理点全体のなす群とし, Gの既約ユニタリ表現の同値類の集合$\hat{G}$を記述する問題を考える. $\underline{\underline{G}}$が reductive な場合には多くの仕事がなされているが, 今だに完全な結果からは程遠い. ここでは$\underline{\underline{G}}$が reductive な場合$\hat{G}$は記述されうるとして一般の場合を考えてみる. その為には正に Mackey 理論が効果的である.

UをGの閉正規部分群として, $\hat{U}$から$\hat{G}$を計算する手続きが Mackey理論である. $\underline{\underline{G}}$が reductive ならばこれでは何も得られないが, $\underline{\underline{G}}$が reductive でないなら, $\underline{\underline{U}}$を$\underline{\underline{G}}$の unipotent radical として Mackey理論を適用しうる.

結果を述べる為，いくつかの概念を導入する．$\underline{\underline{G}}$のリー環を$\mathfrak{g}$，その共役空間を$\mathfrak{g}^*$で表す．$\mathfrak{g}^*$には$G$及び$\mathfrak{g}$がco-adjoint表現で作用するが，この作用に関し，G及び$\mathfrak{g}$の$f \in \mathfrak{g}^*$におけるstabilizerをそれぞれ$G(f)$, $\mathfrak{g}(f)$で表す．$f \in \mathfrak{g}^*$に対し$\mathfrak{g}$上の反対称双一次形式B_fを$B_f(X,Y) = f([X,Y])$　$(X, Y \in \mathfrak{g})$で定義する．

$\boxed{\text{定義}}$　$\mathfrak{b}$を$\mathfrak{g}$の部分リー環，$f \in \mathfrak{g}^*$とする．B_fに関する$\mathfrak{b}$の直交空間を$\mathfrak{b}^f$で表す．$\mathfrak{b}$が（fに関し）coisotropicとは$\mathfrak{b}^f \subset \mathfrak{b}$となることを意味する．

$\mathfrak{g}$の部分リー環$\mathfrak{h}$に対して，$\mathfrak{h}$をリー環とするk上定義された$\underline{\underline{G}}$の代数的部分群$\underline{\underline{H}}$が存在するとき，$\mathfrak{h}$は代数的であるという．この場合${}^u\underline{\underline{H}}$を$\underline{\underline{H}}$のunipotent radicalとしそのリー環を${}^u\mathfrak{h}$で表す．

$\boxed{\text{定義}}$　$f \in \mathfrak{g}^*$とする．$\mathfrak{g}$のcoisotropicな部分リー環$\mathfrak{b}$が強巾単型であるとは，$\mathfrak{b}$が代数的でかつ$\mathfrak{b} = \mathfrak{g}(f) + {}^u\mathfrak{b}$なることをいう．

$\boxed{\text{定義}}$　次の二条件がみたされるとき，$f \in \mathfrak{g}^*$は巾単型であるという．

(i) 強巾単型のcoisotropic部分リー環$\mathfrak{b}$が存在する．

(ii) Ker fに含まれる$\mathfrak{g}(f)$のreductive factorが存在する．

さて，$\mathbf{R}$の自明でないユニタリ指標κを固定しておく．$f \in \mathfrak{g}^*$として，双一次形式B_fは$\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)$上にシンプレクティック構造を与え，我々はシンプレクティック群$Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$，メタプレクティック群$Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$を考えうる．

$$p : Mp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f)) \to Sp(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}(f))$$

を被覆写像とし，$G(f)^\sim = p^{-1}(G(f))$ とおく．$G(f)^\sim$は$G(f)$の二重被覆群である：

$$1 \to \{1, e\} \to G(f)^\sim \xrightarrow{p} G(f) \to 1$$

$$\begin{aligned} Z^{irr}(f) = \{ \tau \in G(f)^{\wedge} ;\ & \tau(e) = -id \\ & \tau(\exp X) = \kappa(f(X))\, id \quad (X \in {}^u\mathfrak{g}(f)) \} \end{aligned}$$

$$Z^{irr} = \{ (f, \tau) \in \mathfrak{g}^* \times G(f)^{\wedge} ;\ f\text{は巾単型},\ \tau \in Z^{irr}(f) \}$$

とおく．このとき，Gは自然にZ^{irr}に作用し次の結果を得る．

$\boxed{\text{定理}}$ $Z^{irr}/G \simeq \hat{G}$ ▨

この証明において，我々はメタプレクティック表現とMackey理論を用い$(f, \tau) \in Z^{irr}$から$T_{f,\tau} \in \hat{G}$を構成する手続きを与える．

（藤原英徳記）

6. A criterion for type I connected Lie groups

(1982年4月13日於京都大学理学部)

まずPukanszkyによる結果を復習しよう．以下講演録5までに用いられた記号，用語は説明なしに用いる．Gを連結かつ単連結なリー群とし，$\mathfrak{g}$をそのリー環とする．Adoの定理により，$\mathfrak{g}$はある有限次元実ベクトル空間上のすべての準同型がなすリー環の部分環と同一視できる．$\tilde{\mathfrak{g}}$で$\mathfrak{g}$を含む最小の代数的リー環，$\tilde{G}$を$\tilde{\mathfrak{g}}$に対応する連結かつ単連結なリー群とすると，Gは$\tilde{G}$の単連結な閉かつ不変な部分群である．$L=[G, G]=[\tilde{G}, \tilde{G}]$ もまた$\tilde{G}$の閉かつ不変な部分群でLはI型になる．従って，$\tilde{G}$はLのユニタリ双対$\hat{L}$にconjugationの反傾で位相変換群として働き，軌道空間$\hat{L}/\tilde{G}$はcountably separatedである．さて，各$\pi\in\hat{L}$に対して，次の性質を持つGの閉部分群$K_\pi\supset L$を見つけることができる．

(i) $\rho\in\hat{K_\pi}$が存在して，ρのLへの制限はπに等しく，$T(\rho)=\mathrm{Ind}_K^G\rho$ はGの因子表現である．

(ii) $\pi_j\in\hat{L}$とし，$\rho_j\in\hat{K_{\pi_j}}$ $(j=1, 2)$を(i)にいうものとする．$T(\rho_1)$と$T(\rho_2)$がquasi-equivalentであるための必要十分条件は，$K_{\pi_1}=K_{\pi_2}$かつρ_1, ρ_2のGにおける固定群G_{ρ_1}, G_{ρ_2}が一致することである．そしてこのとき，$T(\rho_1)$と$T(\rho_2)$はユニタリ同値になる．

(iii) 各 $\pi \in \hat{L}$ と $a \in \tilde{G}$ に対して，$K_{a\pi} = K_\pi$

この条件(iii)によって，K_π が π の $\tilde{G}$ 軌道 E によって決まるので，K_π を $K(E)$ と記すことにし，各 $E = \tilde{G}\cdot\pi \in \hat{L}/\tilde{G}$ に対して

$F(E) = \{\rho \in K(E)^\wedge ; \rho|L \in E\}$，$\mathfrak{O} = \cup_{E \in \hat{L}/\tilde{G}} F(E)$

とおく．このとき，$F(E)$ は $K(E)^\wedge$ の部分空間として局所 compact な Hausdorff 空間である．$\rho \in \mathfrak{O}$ に対して，$J(\rho)$ を $T(\rho)$ の $C^*(G)$ における核とすると，写像 $J : \rho \mapsto J(\rho)$ は $\mathfrak{O}/\Sigma$ から $\mathrm{Prim}\, C^*(G)$ への双射を引き起こす．ここで，Σ は $\mathfrak{O}$ の同値関係で次の性質を持つものである．すなわち，$\rho_1 \Sigma \rho_2 \Leftrightarrow E \in \hat{L}/\tilde{G}$ が存在して，$\rho_j \in F(E)$ $(j = 1, 2)$ であり，ρ_2 は軌道 $G\cdot\rho_1$ の $F(E)$ での閉包に属する．また，$\mathrm{Prim}\, C^*(G)$ は $C^*(G)$ の原始イデアルの全体である．

さて，$\rho \in F(E)$ とする．G_ρ, G_π (G での π の固定群) は E によってのみ決まるので，それらをそれぞれ $U(E)$，$G(E)$ で表す．ここで，$K(E) \subset G(E)$ に注意する．そして $\Gamma(E) = U(E) / K(E)G(E)_0$ とおく．ただし，$G(E)_0$ は $G(E)$ の単位元の連結成分である．また，各 $J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ に対して

$$\mathcal{A}(J) = \{\rho \in \mathfrak{O} ; J(\rho) = J\}$$

とおく.

$\boxed{\text{定理 1}}$ (Pukanszky) $J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ がⅠ型であるための必要十分条件は次の(i), (ii)がみたされることである.

(i) G は $A(J)$ に推移的に作用する.

(ii) $\# \Gamma(E) < +\infty$ ▨

ここで, $J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ がⅠ型であるとは, その核が J となる様な G の因子表現がⅠ型となることである. G がⅠ型であるとは, すべての $J \in \mathrm{Prim}\, C^*(G)$ がⅠ型であることだから, 定理1は G がⅠ型であるための条件を与えていることになる. さて, G が可解リー群のとき, 定理1は G の $\mathfrak{g}^*$ への作用で記述できることがわかっている(単連結という仮定は落とせる).

$\boxed{\text{問題}}$ 一般のリー群 G に対して, 定理1を coadjoint 表現による作用で記述せよ.

以下この問題を考える. $f \in \mathfrak{g}^*$ とし, $\mathfrak{h}$ を f に関して coisotropic な $\mathfrak{g}$ の部分環とする.

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{h}$ が Pukanszky 条件をみたすとは, 任意の $\lambda \in \mathfrak{h}^{\perp}$ ($\mathfrak{g}^*$ における $\mathfrak{h}$ の annihilator) に対して, $\mathfrak{h}^{f+\lambda} = \mathfrak{h}^f$ が成り立つことである.

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{h}$ が可解型であるとは, $\mathfrak{h} = {}^r\mathfrak{h} + \mathfrak{h}(f|_{{}^r\mathfrak{h}})$ となることである. ここで, ${}^r\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{h}$ の solvable radical で

$\mathfrak{h}(f|_{{}^n\mathfrak{h}})$ は $\mathfrak{h}$ における $f|_{{}^n\mathfrak{h}}$ の固定環である.

$\boxed{\text{定義}}$ $\mathfrak{h}$ が強可解型であるとは, $\mathfrak{h} = {}^n\mathfrak{h} + \mathfrak{g}(f)$ が成り立つことである.

$\boxed{\text{定義}}$ f が可解型であるとは, Pukanszky条件をみたし, かつ f に関し coisotropic な任意の可解型部分環が強可解型になっているときをいう.

$\mathfrak{r}$ を $\mathfrak{g}$ の solvable radical, R を対応する G の解析部分群とする.

$\boxed{\text{定義}}$ f が $\mathfrak{r}$-admissible であるとは $R(f)^{\sim}$ のユニタリ指標 η_f が存在して, 次が成り立つことである:

$$\eta_f(e) = -1, \quad \eta_f(\exp X) = e^{if(X)} \qquad (\forall X \in \mathfrak{r}(f))$$

$\mathfrak{g}^*_{\mathfrak{r}}$ を可解型かつ $\mathfrak{r}$-admissible な $f \in \mathfrak{g}^*$ の全体とする. $\mathfrak{X}^{irr}(f)$ を講演録5と同様に定義されたものとする.
(${}^u\mathfrak{g}(f)$ を ${}^{\sim}\mathfrak{g}(f)$ に $\chi(y)$ を e^{iy} に換える.)

$\boxed{\text{定理2}}$ (Duflo) G を連結とする. このとき, G が I 型であるための必要十分条件は次の (i), (ii) が成り立つこと.

(i) $\forall f \in \mathfrak{g}^*_{\mathfrak{r}}$, $G \cdot f$ は $\mathfrak{g}^*$ において局所閉である.

(ii) $\mathfrak{X}^{irr}(f)$ は I 型である. ▨

ここで, $\mathfrak{X}^{irr}(f)$ の元は, $G(f)/R(f)$ (半単純群になる) の projective 表現とみなせることに注意する.

(野村隆昭記)